



VÄRMESPRIDNING I EN LEDARE

MED HJÄLP AV VÄRMELEDNINGSEKVATIONEN



INLEDNING – PARTIELLA DERIVATOR

En partiell derivata är derivatan av en flervariabelfunktion (ex. $f(x, y)$) med avseende på endast en av dess variabler. De andra variablerna behandlas som konstanter.

Ett exempel på en funktion f av variablerna x och y och dess partiella derivator visas nedan:

$$f(x, y) = 3x^2y^2 + 3y + x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy^2 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x^2y + 3$$

INLEDNING - PARTIELL DIFFERENTIALEKVATION

- En partiell differentialekvation (PDE) är en differentialekvation med en funktion som beror av fler än en variabel, till skillnad från en ordinär differential (ODE) där funktionen endast beror av en variabel.
- PDEs kan användas för att beskriva en mängd fenomen, såsom
 - Ljud
 - Värme
 - Elektrodynamik
 - Elektrostatistik
 - Vätskeströmningar
 - Elasticitet
 - Kvantmekanik
- Precis som ODEs kan beskriva endimensionella system, kan PDEs beskriva flerdimensionella sådana.
- Generellt sätt är PDEs mycket svårare att lösa.

INLEDNING – ETT ENKELT EXEMPEL PÅ EN PDE

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3$$

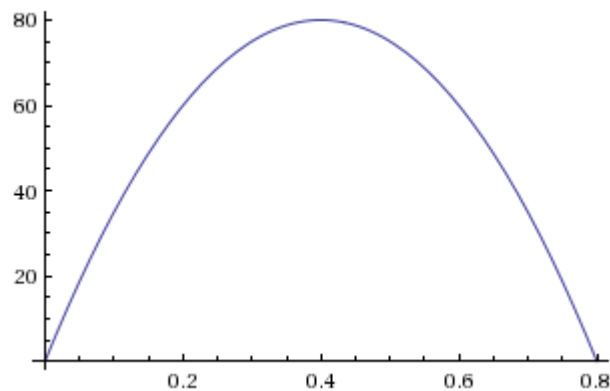
$$\Leftrightarrow$$

$$u(x, y) = \int 3 \, dx + h(y) = 3x + h(y), \quad \frac{dh}{dy}(y) = 0$$

$$u(x, y) = 3x + h(y)$$

PROBLEMFORMULERING

- Vi vill ha reda på hur värmen i en ledare sprider sig och vad dess sluttemperatur kommer att vara
- Ledaren är $0,8m$ lång, är av järn och har en ursprungstemperatur som beskrivs av $500x(0,8 - x)$



UPPSTÄLLNING AV EKVATIONEN

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} \frac{du}{dx}(0, t) = 0 \\ \frac{du}{dx}(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

- $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ och $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ innebär att stavens ändar är helt isolerade
- $u(x, 0) = f(x)$ innebär att stavens ursprungstemperatur vid varje x -koordinat ges av funktionen $f(x)$
- c är den termiska diffusiviteten för materialet
- Funktionen ger en temperatur relativ till omgivningen; om rummet är 20°C och funktionen ger ett värde på 15, är stavens temperatur 35°C

FÖRSTA STEGEN AV LÖSNINGEN

Ekvationen antas ha en lösning på formen (variabelseparation)

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Om det stoppas in i värmeledningsekvationen får vi

$$X(x)\dot{T}(t) = cX''(x)T(t),$$

vilket kan skrivas om till

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = c \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Ingen av leden innehåller någon variabel:

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = c \frac{X''(x)}{X(x)} = c\lambda$$

som skrivs om till

$$\begin{aligned}\dot{T}(t) &= c\lambda \cdot T(t) &\Leftrightarrow & T(t) = Ce^{c\lambda t} \\ X''(x) &= \lambda \cdot X(x)\end{aligned}$$

LÖSNING AV EKVATION 2

Olika värden på egenvärdet λ undersökes:

$$\lambda > 0, \quad \lambda = 0, \quad \lambda < 0.$$

Börjar med $\lambda > 0$ och antar att ekvationen har lösningen $X(x) = Ce^{rx}$:

$$r^2 Ce^{rx} = \lambda Ce^{rx}$$

$$r^2 = \lambda, \quad \lambda > 0.$$

Detta ger lösningen

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Nyttjas randvärdena ges

$$X'(0) = \sqrt{\lambda}C_1 e^{\sqrt{\lambda} \cdot 0} - \sqrt{\lambda}C_2 e^{-\sqrt{\lambda} \cdot 0} = 0$$

$$X'(L) = \sqrt{\lambda}C_1 e^{\sqrt{\lambda}L} - \sqrt{\lambda}C_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0,$$

Vilket, efter lite beräkningar, ger $C_1 = C_2 = 0$, vilket innebär att detta λ ej är något egenvärde.

LÖSNING AV EKVATION 2

Nu undersöks $\lambda = 0$, vilket ger

$$X''(x) = 0$$

som har den mycket enkla lösningen

$$X(x) = \iint 0 \, dx \, dx = Ax + B.$$

Tillämpas randvillkoren fås

$$X''(x) = A = 0,$$

vilket innebär att $X(x) = B$ uppfyller randvillkoren.

LÖSNING AV EKVATION 2

Till sist undersöks $\lambda < 0$:

$$r^2 = \lambda, \quad \lambda < 0.$$

Detta innebär att $r = \pm i\sqrt{-\lambda}$, och således är lösningen till differentialekvationen $X''(x) = \lambda \cdot X(x)$

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Randvärdena nyttjas precis som tidigare, vilket till slut ger $C_2 = 0$ och $\sqrt{-\lambda}C_1 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot L) = 0$. Detta innebär att

$$\sqrt{-\lambda} \cdot L = n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Därav är detta λ ett egenvärde.

HOPSÄTTNING AV EKVATIONERNA

$T_n(t)$ och $X_n(x)$ har då lösningarna

$$T_n(t) = C_{n,1} e^{-c \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t},$$
$$X_n(x) = C_{n,2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

för $n = 1, 2, 3, \dots$

Då kan funktionen $u_n(x, t)$ bestämmas till

$$u_n(x, t) = a_n e^{-c \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

SUPERPOSITION

Eftersom att differentialekvationen är linjär och homogen kan vi ge den fullständiga lösningen genom

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

där a_0 kommer från fallet där $\lambda = 0$.

ANPASSNING AV FUNKTIONEN TILL STARTVILLKOR

Vi har fortfarande inte använt att $u(x, 0) = f(x)$. Därför skriver vi

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \cdot 0} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Detta motsvarar en fourierserie.

ANPASSNING AV FUNKTIONEN TILL STARTVILLKOR

Genom att se detta kan vi bestämma a_0 och a_n genom

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx.$$

Vilket ger den slutgiltiga lösningen $u(x, t)$ till den partiella differentialekvationen genom

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx e^{-c \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

INSTOPPNING AV VÄRDEN

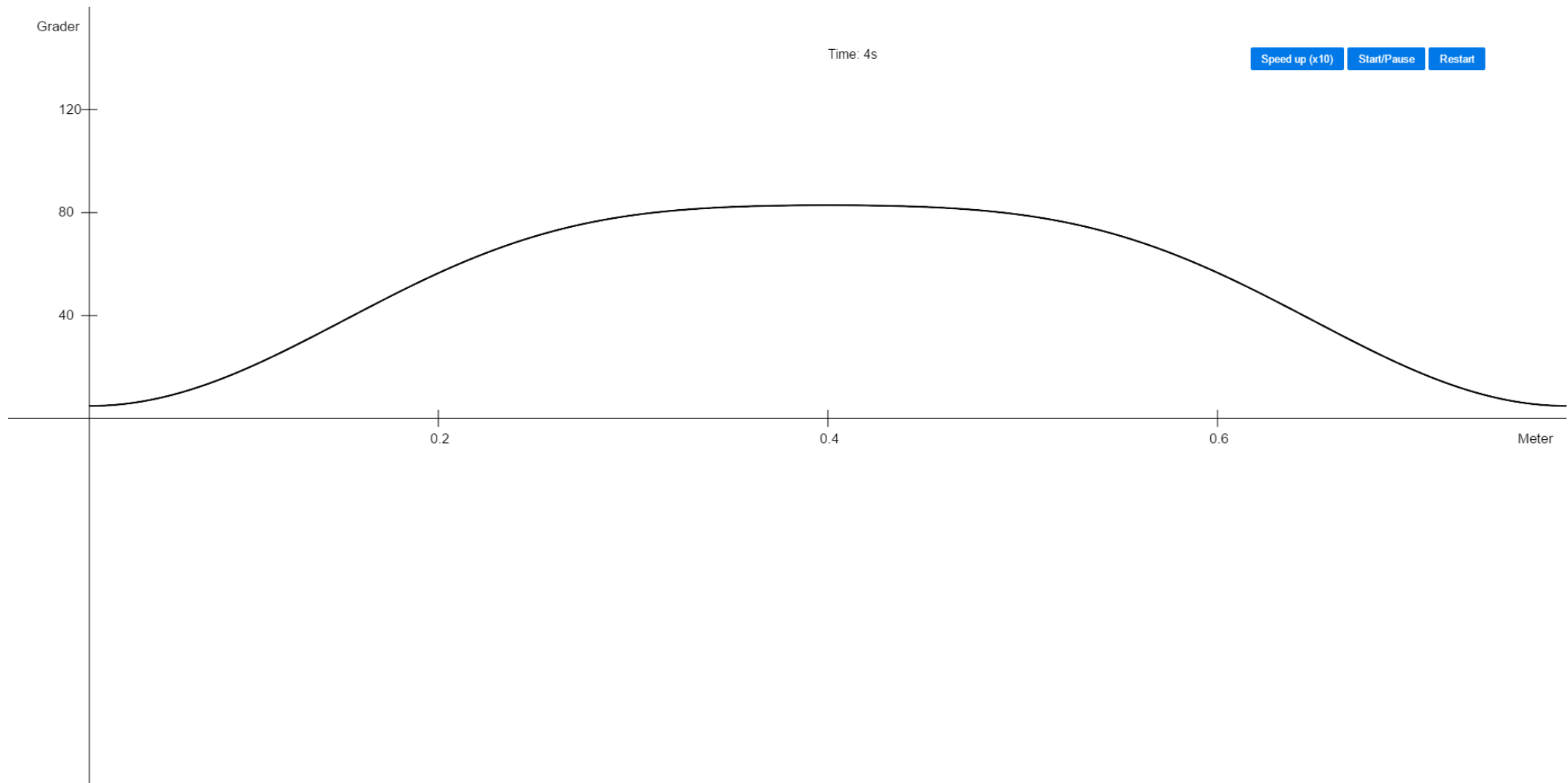
Om vi har en järnstav vars ursprungstemperatur ges av $500x(0,8 - x)$ kan vi ställa upp

$$u(x, t) = \frac{1}{0,8} \int_0^{0,8} 500x(0,8 - x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{0,8} \int_0^{0,8} 500x(0,8 - x) \cos\left(\frac{n\pi}{0,8}x\right) dx e^{-2,3 \cdot 10^{-4} \frac{n^2 \pi^2}{0,8^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{0,8}x\right),$$

där den första termen enkelt räknas ut till $\frac{160}{3} = 53,3333 \dots$

Resterande termer går mot noll då $t \rightarrow \infty$.

EMULERING



DISKUSSION

- Staven närmar sig en temperatur som är 53,3333 ... grader varmare än omgivningen

YTTERLIGARE ANVÄNDNINGSMOMRÅDEN

- Generellt kan värmeledningsfunktionen beskrivas enligt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \nabla^2 u,$$

- Nedan visas en lösning för värmeekvationen i två dimensioner

[http://heat.sellerstam.com/Heat_eqn%20\(1\).gif](http://heat.sellerstam.com/Heat_eqn%20(1).gif)

- Detta kan användas för modellering av värmespridning i mer komplexa system