

Hur rör sig temperaturen i en ledare? Hur kan man avgöra ledarens sluttemperatur?

Detta kan besvaras med en ekvation: värmeledningsekvationen. I detta dokument visas hur man löser värmeekvationen i en dimension för en helt isolerad stav.

Värmelednings- ekvationen

I en dimension

Otto Sellerstam



Säg att vi arbetar på en fabrik inriktad på massproduktion av en viss vara. Vi håller på att konstruera en maskin som arbetar i korta intervall som kommer att effektivisera arbetet avsevärt, men maskinen är väldigt dyr på grund av dess komponenter. Speciellt dyr är en ledare som enkelt värms upp på grund av kortvarig, men intensiv friktion. Om hela ledarens temperatur överstiger en viss temperatur under en längre tidsperiod riskerar den att bli skadad; därför måste vi ta reda på hur varm den delen av ledaren som utsätts för friktion får bli utan att hela ledaren riskerar att överstiga den skadliga temperaturen. Ledaren befinner sig även i en sådan position så att den kan anses vara helt isolerad, och den kyles bara ned då den tagits ut ur maskinen. Ledaren värms upp på mitten och vi vill veta hur värmen sprider sig genom ledaren och vad dess slutgiltiga jämviktstemperatur kommer att vara. För att modellera värmeenergins spridning i ledaren kan vi använda oss av värmeledningsekvationen.

Vi ställer upp värmeledningsekvationen med passande randvärden (dvs. ett krav på en differentialekvation) enligt nedan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} \frac{du}{dx}(0, t) = 0 \\ \frac{du}{dx}(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ och $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ innebär att stavens ändrar är helt isolerade, och därmed även hela staven, och $u(x, 0) = f(x)$ innebär att stavens ursprungstemperatur vid varje x -koordinat ges av funktionen $f(x)$. c är den termiska diffusiviteten för materialet. För en lista över olika materials termiska diffusivitet, se https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_diffusivity. Denna funktion, u , ger en temperatur som är relativ till omgivningstemperaturen. Exempelvis skulle ett funktionsvärde på 50 med en omgivningstemperatur på 20°C innebära att ledaren är 70°C.

Om vi separerar funktionen u enligt $u(x, t) = X(x)T(t)$ får vi då nedanstående samband

$$X(x)\dot{T}(t) = cX''(x)T(t).$$

(Detta är en klassisk metod för att tackla differentialekvationer, speciellt partiella sådana.)

Nu bör vi behandla båda leden så att en funktion och dess derivator hamnar på en egen sida, enligt nedan

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = c \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Detta innebär att ingen av leden innehåller någon variabel, ty en funktion av endast x kan inte innehålla någon annan variabel t , och vice versa. Således kan man då säga att båda leden är konstanta enligt

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = c \frac{X''(x)}{X(x)} = c\lambda,$$

vilket går att skriva om till

$$\dot{T}(t) = c\lambda \cdot T(t)$$

$$X''(x) = \lambda \cdot X(x)$$

Detta är alltså två stycken ordinära differentialekvationer, och de kan därav behandlas som sådana. Vi börjar med att lösa den övre, vilket görs väldigt enkelt:

$$T(t) = Ce^{c\lambda t}$$

Då det kommer till den andra blir det lite mer komplicerat; det är nämligen en ordinär differentialekvation av andra graden som kräver att man bestämmer de korrekta egenvärdena till funktionen, dvs. λ . För att göra detta behöver man undersöka tre stycken olika fall:

$$\lambda > 0, \quad \lambda = 0, \quad \lambda < 0.$$

Vi börjar med det först nämnda fallet. Vi antar att differentialekvationen har lösningen $X(x) = Ce^{rx}$, vilket innebär att den kan skrivas om till

$$r^2 Ce^{rx} = \lambda Ce^{rx}$$

Om båda leden divideras med Ce^{rx} ges

$$r^2 = \lambda, \quad \lambda > 0.$$

Detta innebär att lösningen till differentialekvationen är

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

För att komma vidare nyttjas de randvärden som angavs, vilket ger

$$X'(0) = \sqrt{\lambda}C_1 e^{\sqrt{\lambda} \cdot 0} - \sqrt{\lambda}C_2 e^{-\sqrt{\lambda} \cdot 0} = 0$$

$$X'(L) = \sqrt{\lambda}C_1 e^{\sqrt{\lambda}L} - \sqrt{\lambda}C_2 e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

Den första av dessa ekvationer förenklas till

$$C_1 - C_2 = 0$$

medan den andra ger

$$C_1 e^{2\sqrt{\lambda}L} + C_1 = 0$$

Vilket ger den triviala lösningen $C_1 = C_2 = 0$, och således är $\lambda > 0$ inte något sökt egenvärde till funktionen.

Nu undersöker vi $\lambda = 0$. Detta skulle innebära att

$$X''(x) = 0,$$

vilket har den mycket enkla lösningen

$$X(x) = \iint 0 \, dx \, dx = Ax + B.$$

Tillämpas randvillkoren här fås endast

$$X''(x) = A = 0,$$

vilket skulle innebära $X(x) = B$ uppfyller randvillkoren.

Till sist ser vi om $\lambda < 0$ är ett egenvärde. För att göra det återgår vi till metoden som vi använde för att undersöka $\lambda > 0$, nämligen att differentialekvationen går att skriva om till

$$r^2 = \lambda.$$

Här är emellertid $\lambda < 0$, vilket innebär att r är komplext. r kan då skrivas som $\pm i\sqrt{-\lambda}$. Detta ger lösningen till differentialekvationen enligt

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Sedan nyttjas randvärdena, liksom tidigare, för att komma vidare:

$$X'(0) = \sqrt{-\lambda}C_2 \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot 0) - \sqrt{-\lambda}C_1 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot 0) = 0$$

$$X'(L) = \sqrt{-\lambda}C_2 \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot L) - \sqrt{-\lambda}C_1 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot L) = 0.$$

Den övre ekvationen kan förenklas till

$$\sqrt{-\lambda}C_2 = 0.$$

Vi har antagit att $\lambda \neq 0$, vilket innebär att $C_2 = 0$. Den andra ger då

$$\sqrt{-\lambda}C_1 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot L) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{-\lambda} \cdot L = n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Därav är detta λ ett egenvärde. Detta innebär att de två funktionerna $T(t)$ och $X(x)$ har lösningarna

$$T_n(t) = C_{n,1} e^{-c\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

$$X_n(x) = C_{n,2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

för $n = 1, 2, 3, \dots$

Då kan funktionen $u_n(x, t)$ bestämmas till

$$u_n(x, t) = a_n e^{-c\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Eftersom att differentialekvationen är linjär och homogen kan vi med hjälp av superposition (dvs. att en lösning till en homogen, linjär differentialekvation plus en annan ger ytterligare en lösning) ge den fullständiga lösningen genom

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Notera konstanten a_0 som kommer från fallet då $\lambda = 0$.

Men vi har fortfarande inte gjort någonting med $u(x, 0) = f(x)$. Vi skriver då funktionen

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c\frac{n^2\pi^2}{L^2}0} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Efter att inspektera denna funktion kan man se att det är en fourierserie, mer specifikt en cosinusserie (Detta är ingenting som behövs beskrivas över huvud taget, ty det blir relativt komplicerat och tar mycket tid. Jag kan dock nämna att man stöter på det i linjär algebra.) Detta är bara en fourierserie för

funktionen $f(x)$, och därför måste vi skriva den som jämn, periodisk funktion. Genom att se att funktionen motsvarar en fourierserie kan vi bestämma variablerna a_0 och a_n genom

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Då fås den slutgiltiga lösningen $u(x, t)$ till den partiella differentialekvationen genom

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx e^{-c \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Om vi nu säger att vi har det riktiga fallet där stavens ursprungstemperatur ges av $500x(0,8 - x)$ (detta innebär även att staven längd, L , är $0,8m$) och staven är av järn med den termiska diffusiviteten $2,3 \cdot 10^{-4} m^2/s$ kan vi då ställa upp funktionen

$$u(x, t) = \frac{1}{0,8} \int_0^{0,8} 500x(0,8 - x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{0,8} \int_0^{0,8} 500x(0,8 - x) \cos\left(\frac{n\pi}{0,8}x\right) dx e^{-c \frac{n^2 \pi^2}{0,8^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{0,8}x\right),$$

där den första termen enkelt räknas ut till $\frac{160}{3} = 53,3333 \dots$

En approximation till denna funktion med sex stycken termer visas på <http://heat.sellerstam.com/wave.html>. Här är temperatur på y-axeln och längd på x-axeln. Den positiva x-axeln är alltså hela stavens längd och på y-axeln ser man hur temperaturen i staven varierar med tiden.

Vid närmre analys av funktionen märks även att $u(x, t) \rightarrow \frac{160}{3}$ när $t \rightarrow \infty$, ty $e^{-c \frac{n^2 \pi^2}{0,8^2} t} \rightarrow 0$. Detta innebär att stavens slutgiltiga jämviktstemperatur är $\frac{160}{3}$, och i det generella fallet ges den av a_0 .

Sammanfattning:

För att avsluta kan man sammanfatta det som att järnstav av längden $0,8m$ med en ursprungstemperatur som ges av $500x(0,8 - x)$ får en slutgiltig jämviktstemperatur av $\frac{160}{3}$ grader varmare än omgivningstemperaturen. Hur värmen sprider sig går även att beskriva med en simulering lik denna: <http://heat.sellerstam.com/-/wave.html>